

noch „begleitet“ von Operatoren

$$(\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}) \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}).$$

Sie korrigieren nachträglich summarisch die Reflexionsverluste, die beim Eintritt und Austritt an den Grenzflächen entstehen.

Schließlich kommt speziell beim Austritt aus der Rückfläche noch der schon früher behandelte Phasenoperator \mathfrak{P} hinzu, der davon herrührt, daß die Phasen sämtlicher Strahlen einheitlich auf die Vorderfläche bezogen sind.

Wir stellen nun als Beispiel den Gesamtoperator zusammen für die Umwandlung eines Strahlbündels nach Eintritt in den Kristall an der Vorderfläche + Durchlauf zur Rückfläche + Reflexion dortselbst + Durchlauf zur Vorderfläche + Reflexion dortselbst + Durchlauf zur Rückfläche + Austritt dortselbst: (Von rechts nach links zu lesen)

$$\mathfrak{P}(\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}) \mathfrak{Q} \mathfrak{R}' \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q}.$$

Da sich alle (nach verschieden oft wiederholter innerer Reflexion) aus der Rückfläche austretenden Strahlbündel additiv superponieren, ist die Matrix der resultierend austretenden Strahlen

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a &= \mathfrak{P}(\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}) \mathfrak{Q} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{R}' \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q})^n \cdot \mathbf{U}_e \\ &= \mathfrak{P}(\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}) \mathfrak{Q} (\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q})^{-1} \cdot \mathbf{U}_e. \end{aligned} \quad (37)$$

Die genäherte Gl. (16) vernachlässigte rechts den 2. und den 4. Faktor.

Auf analoge Weise stellen wir den Operator für die an der Vorderfläche austretenden Strahlbündel zusammen und erhalten durch Summation die Matrix der resultierend reflektierten Strahlen

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_r &= \left[\mathfrak{R} - (\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}) \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{R}' \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q})^n \right] \mathbf{U}_e \\ &= [\mathfrak{R} - (\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{R}) \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q} (\mathbf{1} - \mathfrak{R}' \mathfrak{Q}' \mathfrak{R} \mathfrak{Q})^{-1}] \mathbf{U}_e. \end{aligned} \quad (38)$$

Zu den gleichen Formeln gelangt man, wenn man in den Randbedingungen von vornherein nur das dynamische Gleichgewicht der resultierenden Strahlbündel ansetzt, ohne Strahlrichtungen im Kristall und Prozeßfolgen in Betracht zu ziehen. Die entwickelten Formeln für Einzelprozesse gestatten aber eine kausal-anschauliche Deutung des Strahlengleichgewichts und die Übertragung auf solche (praktisch bisher uninteressanten) Fälle, in denen der Strahlaustritt an mehreren Stellen lokalisiert erfolgt.

Der Einfluß der individuellen Feldkomponente auf die Elektronenemission der Metalle*

Von G. ECKER und K. G. MÜLLER

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Bonn
(Z. Naturforschg. 14 a, 511—520 [1959]; eingegangen am 25. Februar 1959)

This investigation considers the field electron emission of metals under the influence of space charges. Usually the field action of the space charge is taken into account by the average field F calculated from the Poisson equation. However the statistical distribution of the charge carriers causes field fluctuations on the surface of the metal. As the current density j depends exponentially on the field strength F , these fluctuations yield strong deviations from the relation $j \approx j(F)$, where j is the average current density. Accounting for the individual field component we find that in a certain range of space charge density the average current density j is increased by several orders of magnitude. In the application this effect proves to be of great interest relative to the existence of the field arc.

Die Befreiung von Elektronen aus dem Inneren der Metalle ist von Bedeutung für viele Probleme der Physik. Zwei Prozesse, die sowohl getrennt wie auch gemeinsam wirken können, sind in diesem Zusammenhang von besonderer Bedeutung: die Temperaturemission einerseits und die Feldemission andererseits. Bei der Herleitung der entsprechenden

Emissionsgesetze wird stets ein über die Oberfläche des Metalls konstantes Feld vorausgesetzt. Diese Annahme trifft bei vielen experimentellen Anordnungen zu oder stellt zumindest eine gute Näherung dar, wenn die mittlere Stromdichte mit der Stromdichte des mittleren Feldes identifiziert werden kann.

Wir untersuchen hier den Fall, daß die Felder an der Metalloberfläche durch Ionenraumladungen erzeugt werden. Die Schwankungen der Raumladungsdichte verursachen Schwankungen des Feldes, die

* This research was supported in part by the United States Department of Army, through its European Research Office.



– wie im folgenden gezeigt werden soll – zu einer erheblichen Erhöhung der Feldelektronenemission führen können.

1. Grundgedanke

Wie bereits erwähnt wurde, ersetzen die bisherigen theoretischen Überlegungen die mittlere Emissionsstromdichte durch die Emission des mittleren Feldes. Dieses Vorgehen ist jedoch nur dann gerechtfertigt, wenn in dem wesentlichen Mittelungsbereich ein linearer Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feld angenommen werden kann. Da die NORDHEIM-FOWLER-Gleichung eine exponentielle Abhängigkeit der Stromdichte vom Feld fordert, trifft dies nur für kleine Feldschwankungen zu. Die Größe der Feldschwankungen ist durch das Mikrofeld der Raumladung bestimmt. Wir werden also Abweichungen von der Relation

$$\bar{j}_- \approx j_-(\bar{F}) \quad (1)$$

erwarten, wenn das mittlere Mikrofeld in die Größenordnung der mittleren Feldstärke kommt.

2. Berechnung der Feldschwankungen

Wir berechnen die Feldwahrscheinlichkeit für das folgende Modell. Vor einer ebenen, unendlich ausgedehnten Metalloberfläche befindet sich eine homogene positive Raumladungsschicht der Dicke d . Die Trägerdichte n innerhalb dieser Schicht sowie die Ausdehnung d seien frei verfügbar. Im übrigen setzen wir die Energie der Ladungsträger als genügend groß voraus, um den Einfluß des BOLTZMANN-Faktors vernachlässigen zu können (s. z. B. Anm. ¹). Die einzelnen Volumenelemente der Raumladungszone sind dann gleich wahrscheinlich und die Träger stochastisch unabhängig. Dieses Modell hat allgemeine

Bedeutung und ist insbesondere für die beabsichtigte Anwendung auf die Theorie der Bogenkathode zugeschnitten.

Würde man die Feldwirkung dieser Anordnung mit Hilfe der POISSON-Gleichung erfassen, so wäre nur der Beitrag der kollektiven Zone richtig beschrieben; der Beitrag der individuellen Zone, die dem Metall unmittelbar vorgelagert ist, würde jedoch nur ungenügend erfaßt². Die folgende Rechnung soll dazu dienen, auch die Einwirkung der individuellen Zone korrekt wiederzugeben.

Da in unserem Modell alle Aufpunkte der Metalloberfläche gleichwertig sind, greifen wir einen beliebigen heraus und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, die Feldstärke \mathfrak{F} vorzufinden. Der Feldstärkevektor \mathfrak{F} hat wegen der Spiegelladung stets nur eine Komponente senkrecht zur Metalloberfläche. Führen wir sphärische Polarkoordinaten ein, so erzeugt ein Ion unter Berücksichtigung der Spiegelladung im Aufpunkt das Feld

$$f = f_z = 2 e \cos \vartheta / r^2. \quad (2)$$

Unsere Aufgabe ist ein Spezialfall des allgemeinen Problems des „random flight“, dessen Lösung sich mit Hilfe der MARKOFF-Methode für große Teilchenzahlen in der Form

$$\mathcal{W}(\mathfrak{F}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \exp(-i \mathfrak{f} \mathfrak{F}) A(\mathfrak{f}) d\mathfrak{f},$$

$$A = \exp - N \left\{ 1 - \frac{1}{V} \int \int \int \exp(i \mathfrak{f} \mathfrak{f}) d\mathfrak{r} \right\} \quad (3)$$

darstellen läßt³.

Wegen $f_x = f_y = 0$ ergeben die Integrationen über k_x und k_y erwartungsgemäß DIRAC-Funktionen. Es gilt also

$$\mathcal{W}(\mathfrak{F}) = \delta(F_x) \delta(F_y)$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi} \int \exp(-i k_z F_z) A(k_z) dk_z. \quad (4)$$

Zur Berechnung der Spektralfunktion

$$A = \lim_{\vartheta_k \rightarrow \pi/2} \exp - N \left\{ 1 - \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_k} \int_{r=0}^{d/\cos \vartheta} \exp \left(i \frac{2 e k_z \cos \vartheta}{r^2} \right) r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right\} \quad (5)$$

benutzen wir die Umformung

$$\frac{2 e k_z \cos \vartheta}{r^2} = u, \quad \frac{2 e k_z \cos^3 \vartheta}{d^2} = \alpha \quad (6)$$

und erhalten

$$A = \lim_{\vartheta_k \rightarrow \pi/2} \exp - N \left\{ 1 - \frac{2\pi}{V} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_k} \frac{(2 e k_z \cos \vartheta)^{3/2}}{2} \int_{u=\alpha}^{\infty} u^{-3/2} \exp(i u) du \sin \vartheta d\vartheta \right\}. \quad (7)$$

¹ G. ECKER u. K. G. MÜLLER, Z. Phys. **153**, 317 [1958].

² G. ECKER, Z. Phys. **140**, 274 [1955].

³ S. CHANDRASEKHAR, Rev. Mod. Phys. **15**, 1 [1943].

Durch partielle Integration und Reihenentwicklung läßt sich die Spektralfunktion in die Form

$$A = \lim_{\vartheta_g \rightarrow \pi/2} \exp - N \left\{ 1 + \frac{2\pi d^3}{3V} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_g} \cos^{-3} \vartheta \left[1 + 3i\alpha - 2\sqrt{\pi} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \alpha^{1/2} \right] d(\cos \vartheta) \right\} \quad (8)$$

bringen. Wegen

$$\frac{2\pi d^3}{V} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_g} \cos^{-3} \vartheta d(\cos \vartheta) = -1 \quad (9)$$

folgt hieraus

$$A = \lim_{\vartheta_g \rightarrow \pi/2} \exp 4\pi n d e (i k_z) \left\{ (1 - \cos \vartheta_g) - \frac{16}{15} \pi^{1/2} e^{1/2} n (1+i) k_z^{1/2} (1 - \cos^{1/2} \vartheta_g) \right\}. \quad (10)$$

Wir führen die mittlere Feldstärke

$$\bar{F} = 4\pi n d e \quad (11)$$

aus der Poisson-Gleichung und die Normalfeldstärke des Mikrofeldes $F_0 = e\pi \left(\frac{16}{15}n\right)^{1/2}$

$$(12)$$

ein. Gehen wir zur Grenze über, so gilt

$$A = \exp \{ i k_z \bar{F} - (1+i) (k_z F_0)^{1/2} \} \quad (13)$$

und damit für die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(\mathfrak{F}) = \delta(F_x) \delta(F_y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{ -i k_z (F_z - \bar{F}) - (1+i) (k_z F_0)^{1/2} \} dk_z. \quad (14)$$

Mit

$$k_z F_0 = v, \quad (F_z - \bar{F})/F_0 = x \quad (15)$$

läßt sich

$$W(\mathfrak{F}) = \delta(F_x) \delta(F_y) \frac{1}{2\pi F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i v x - (1+i) v^{1/2}) dv \quad (16)$$

symmetrisch zusammenfassen zu

$$W(\mathfrak{F}) = \delta(F_x) \delta(F_y) \frac{1}{\pi F_0} \int_0^{\infty} \cos(v x + v^{1/2}) \exp(-v^{1/2}) dv. \quad (17)$$

Um die Lösung* dieses Problems mit Hilfe eines Analogrechners vorzubereiten, führen wir die Integraldarstellung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(v x + v^{1/2}) \exp(-v^{1/2}) dv \quad (18)$$

auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{2}{3} x^2 \frac{d\Phi}{dx} - \frac{5}{6} x \Phi = 0 \quad (19)$$

zurück, die mit $z = \frac{2}{27} x^{-3}$

$$(20)$$

in die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(d^2 \Phi/dz^2) + \left(\frac{2}{3} - z\right) d\Phi/dz - \frac{5}{6} \Phi = 0 \quad (21)$$

übergeht. Die Lösungen dieser Gleichungen sind bekannt.

In Abb. 1 ist der Verlauf der Funktion $\Phi(x)$ auf-

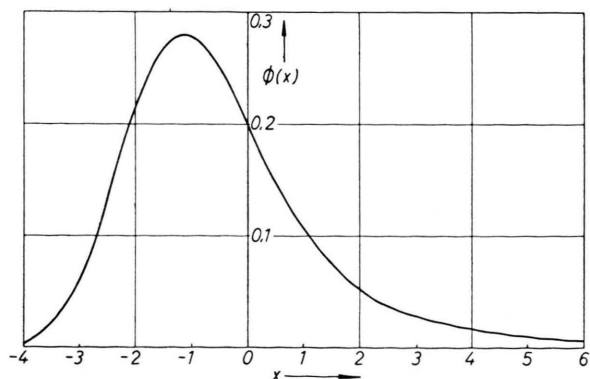


Abb. 1. $\Phi(x)$ gibt die Feldwahrscheinlichkeit, bezogen auf die relative Feldschwankung $x = (F - \bar{F})/F_0$, an.

* Wir danken Herrn Dr. P. F. MÜLLER aus dem Institut für Instrumentelle Mathematik der Universität Bonn für seine Unterstützung bei der maschinellen Auswertung, wie auch für den Hinweis auf die Umformungsmöglichkeiten von (18) nach (21).

getragen, wie ihn die maschinelle Integration der Differentialgleichung (19) ergibt. Der Verlauf für

große Werte von $|x|$ läßt sich aus den folgenden asymptotischen Reihenentwicklungen beurteilen:

$$\Phi(x) \approx \frac{3}{4} \sqrt{2/\pi} x^{-5/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{5}{6})_n (\frac{7}{6})_n (-1)^n (\frac{3}{2})^n}{n!} x^{-3n}, \quad x \gg 1, \quad (22)$$

$$\Phi(x) \approx C \exp(\frac{3}{2} x^3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{6})_n (\frac{1}{6})_n (\frac{3}{2})^{n+1/2}}{n!} x^{-3n+1/2}, \quad x \ll 1. \quad (23)$$

Die Wahrscheinlichkeit verschwindet für große negative Werte von x exponentiell, während sie für große positive Werte nur mit $x^{-5/2}$ abnimmt.

Wir merken noch an, daß wegen der in (8) verwendeten Reihenentwicklung

$$\bar{F} > 4 F_0 \quad (24)$$

gelten muß. Diese Beschränkung ist wichtig, da nur in ihren Grenzen die Funktion $W(F)$ für $F < 0$ genügend verschwindet und der Mittelwert von F mit dem Wert aus der Poisson-Gleichung identisch ist.

3. Bestimmung der mittleren Stromdichte

Die Emissionsstromdichte berechnet sich aus der quantenmechanischen Lösung des Problems Metall-Außenraum.

Nehmen wir im feldfreien Außenraum nur ein einzelnes Ion an, so bewirkt das Ionenfeld den Übergang eines Elektrons in einen der atomaren Eigenzustände, d. h. Neutralisation. Hierbei werden Energieniveaus dicht unterhalb der FERMI-Grenze bevorzugt. Hinsichtlich der rechnerischen Erfassung verweisen wir auf die Arbeit von COBAS und LAMB⁴.

Wird dem Ionenfeld ein äußeres Feld überlagert, so verändern sich die atomaren Eigenfunktionen entsprechend dem STARK-Effekt. Die effektive Ionisierungsspannung wird erniedrigt. Führt diese Erniedrigung in extremen Feldern unter das FERMI-Niveau, so kann nach KISLIUK⁵ vor der Neutralisation noch ein zusätzliches, freies Elektron emittiert werden.

Halten sich jedoch vor der Metalloberfläche viele Ionen gleichzeitig auf, so überlagern sich die obersten Eigenzustände der Ionen zu Bändern. Innerhalb

dieser Bänder können sich die Elektronen nahezu frei bewegen. Bei großen Ionendichten wird sich die Verschmierung der Eigenfunktionen bis zur FERMI-Grenze erstrecken. In diesem Fall läßt sich der Elektronenaustritt durch die NORDHEIM-FOWLER-Gleichung erfassen. Der Übergang in diskrete Eigenzustände unterhalb der FERMI-Grenze führt nach wie vor zur Neutralisation.

Ein Effekt der individuellen Feldkomponente ist nur in diesem letzten Fall der großen Ionendichten zu erwarten. Die Anwendung der NORDHEIM-FOWLER-Gleichung setzt dabei die Gültigkeit der folgenden Annahmen voraus:

a) eindimensionale Beschreibung, b) stationäre Behandlung, c) Vernachlässigung der Elektronenraumladung, d) Gleichgewichtsverteilung der Elektronen im Metall, e) Gültigkeit des Bildkraftpotentials.

Diese Voraussetzungen schätzen wir an Hand des vereinfachten Potentialverlaufs der Abb. 2 mit zeit-

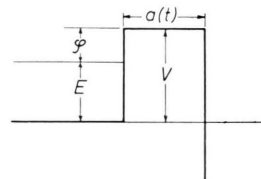


Abb. 2. Potentialverlauf zur Abschätzung der Beschränkung der NORDHEIM-FOWLER-Gleichung.

lich veränderlicher Dicke $a(t)$ ab.

Zu a): Die quantenmechanischen Gleichungen sind in eindimensionaler Form verwendbar, wenn die Bedingung

$$1 < \frac{2 l^2 m}{\hbar^2} |E - V| \quad (25)$$

erfüllt ist, wo E bzw. V die Gesamtenergie bzw. das Potential und l die laterale Erstreckung kennzeichnen. In unserer Anwendung ist l mit der mittleren seitlichen Ausdehnung der Bereiche konstanter Emissionsdichte zu identifizieren. Der Halbwertsbreite der Emissionsbereiche ordnet die NORDHEIM-FOWLER-Gleichung eine gewisse relative Feldschwankung zu. In dem uns interessierenden Bereich der Einteilchen-näherung bestimmt diese Feldschwankung dann die laterale Erstreckung

$$l = 8 \cdot 10^{-7} \varphi^{-3/4}, \quad l \text{ in cm, } \varphi \text{ in eV} \quad (26)$$

unabhängig von dem Ionenabstand. Mit (25) und (26) ergibt sich die Berechtigung der eindimensio-

⁴ A. COBAS u. W. E. LAMB, Phys. Rev. **65**, 327 [1944].

⁵ P. KISLIUK, J. Appl. Phys. **30**, 51 [1959]. Wir danken Herrn Dr. P. KISLIUK für die freundliche Mitteilung seiner Ergebnisse vor der Publikation.

nen Näherung. Im übrigen kann die Austrittsarbeit in der NORDHEIM-FOWLER-Gleichung wegen der Gitterstruktur nur die Bedeutung eines Mittelwertes haben. Hinsichtlich dieser Mittelung gelten grundsätzlich dieselben Überlegungen, wie sie hier für die Mittelung über F diskutiert werden. Wir gehen jedoch auf diesen Punkt nicht näher ein, da die Größe φ in unserer Rechnung als vorgegebener Parameter auftritt.

Zu b): Selbst bei beliebig langsamen Vorgängen gibt es immer gewisse Zeitintervalle, in denen quasistationäre Beschreibung nicht möglich ist. Der nichtstationäre Anteil dieser Zeitintervalle ist jedoch vernachlässigbar, wenn

$$|E\psi| \gg \left| \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| \quad (27)$$

gilt, wo ψ durch den Ansatz

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) \psi(r, t) \quad (28)$$

definiert ist. Aus den quantenmechanischen Lösungsfunktionen für den Potentialverlauf der Abb. 2 ergibt sich nach einiger Rechnung für die Höchstgeschwindigkeit des Ions die Forderung

$$v_+ < E/4 \sqrt{2 m (V - E)}. \quad (29)$$

Bei den von uns untersuchten Anordnungen ist diese Bedingung befriedigt.

Zu c): Wir ersetzen die Emissionsverteilung durch einen Kanal konstanter Emissionsdichte der Halbwertsbreite l . Integriert man die quantenmechanisch errechnete Elektronendichte im Potentialwall über den Kanal, so ergibt sich, daß der Einfluß der Elektronenraumladung vernachlässigbar ist. Dieses Ergebnis wird auch durch die Überlegungen von LEWIS⁶ bestätigt.

Zu d): Die NORDHEIM-FOWLER-Gleichung basiert auf der Annahme der Gleichgewichtsverteilung der Elektronen im Metall. Diese Annahme ist berechtigt, wenn die mittlere Elektronenfluktuation im Metall groß ist gegenüber der Emissionsstromdichte. Insbesondere darf das Feld des Ions den Potentialwall nicht unter das Niveau des FERMI-Sees senken. Dies begrenzt die Anwendung der NORDHEIM-FOWLER-Gleichung nach hohen Feldstärken hin:

$$F < F_e = 0,69 \cdot 10^7 \varphi^2, \quad F \text{ in V/cm, } \varphi \text{ in eV.} \quad (30)$$

Zu e): Das Potential muß mit der Annäherung an die Metalloberfläche stetig in den Wert für das In-

nere des Metalles übergehen. Unterhalb eines gewissen Grenzabstandes versagt daher das Bildkraftpotential. Dieser Effekt tritt nach LEWIS⁶ erst bei Feldstärken $F > 5 \cdot 10^7$ in Erscheinung und ist auch dann — wie man aus Abb. 3 der Arbeit⁶ erkennt — im Rahmen unserer Näherungen von untergeordneter Bedeutung.

Die mittlere Emissionsdichte

$$\bar{j}_- = \int_0^\infty j_-(F) W(F) dF \quad (31)$$

kann daher in den Grenzen unserer Voraussetzungen unter Verwendung der NORDHEIM-FOWLER-Gleichung für $j(F)$ berechnet werden.

Für $W(F)$ gilt (17), da wegen der Gleichwertigkeit aller Punkte der Oberfläche Zeit- und Raummittelwert identisch sind.

4. Begrenzung des Integrationsbereiches von x

Der Einfluß der individuellen Feldkomponente wird in dem maßgeblichen Bereich großer x -Werte durch die Einteilchennäherung beschrieben. Er endet daher notwendig bei der Neutralisation des felderzeugenden Ions. Gehört zu dem Neutralisationsabstand R_n die Feldstärke F_n , so begrenzt dies unseren Integrationsbereich auf $x < x_n = (F_n - \bar{F})/F_0$. Der Neutralisationsabstand ist keine feste Größe, sondern hängt von den Eigenschaften des Ions und insbesondere des beteiligten atomaren Eigenzustandes ab.

Könnten wir aus der quantenmechanischen Lösung des Neutralisationsproblems die Wahrscheinlichkeit $\omega(x_n)$ für x_n bestimmen, so müßte die mittlere Stromdichte nochmals hinsichtlich der oberen Grenze gemittelt werden:

$$\begin{aligned} \bar{j}_- &= \int_0^\infty \omega(x_n) \bar{j}_- dx_n \\ &= \int_{x_n=0}^\infty \int_{x=-F/F_0}^{x_n} j_-(x) \Phi(x) dx \cdot \omega(x_n) dx_n. \end{aligned} \quad (32)$$

Obwohl eine allgemeine Theorie des Neutralisationsabstandes R_n nicht zur Verfügung steht, läßt sich folgende Feststellung mit Sicherheit treffen. Es findet keine Neutralisation statt, solange die Elektroneneigenfunktionen des Metalls und des Ions sich nicht genügend überlappen, da unter diesen Umständen die Matrixelemente des Wechselwirkungs-

⁶ T. J. LEWIS, Phys. Rev. **101**, 1694 [1956].

operators verschwinden. Nach dieser Überlegung muß R_n von der Größenordnung des mittleren Elektronenabstandes des an der Neutralisation beteiligten atomaren Zustandes sein.

Wegen der Verschmierung der höheren Eigenzustände und der Resonanzerscheinung kann die Neutralisation nur in Zustände unterhalb der FERMI-Grenze erfolgen. Liegen in diesem Bereich mehrere diskrete Zustände, so benutzen wir zur Abschätzung von R_n den größten der mittleren Elektronenabstände.

5. Wahl der Parameter

In die Rechnung gehen folgende Parameter ein: die mittlere Feldstärke \bar{F} , die Mikrofeldstärke F_0 , der Grenzabstand R_n und das Austrittspotential φ .

Diese Parameter sind durch die Trägerdichte n , die Ausdehnung der Raumladungszone d , sowie die Eigenschaften des Gases und der Metalloberfläche bestimmt. Infolge dieses physikalischen Hintergrundes können \bar{F} , F_0 , R_n und φ selbstverständlich nicht willkürlich verfügt werden.

Der interessierende Bereich von φ liegt zwischen 3,5 und 4,5 eV.

Der Grenzabstand R_n hängt von der Lage des FERMI-Niveaus und den Eigenschaften des Ions, d. h. von Metall und Gasart ab. R_n hat allgemein die Größenordnung von einigen Å.

Grundsätzlich sind \bar{F} und F_0 mit n und d in weiten Grenzen variierbar. Die Mannigfaltigkeit wird jedoch durch folgende Gesichtspunkte reduziert:

a) Wir untersuchen nur solche Raumladungsschichten, bei denen die Berechnung eines mittleren Feldes aus der Poisson-Gleichung einen Sinn hat. Dies schließt automatisch monoatomare Ionenschichten aus und liefert die Forderung

$$n^{1/3} d > 1 \quad (33)$$

$$\text{oder umgeformt } \kappa = \bar{F}/F_0 > 3,8. \quad (34)$$

Es ist nicht überraschend, daß (34) mit (24) übereinstimmt, da ja unsere Berechnung die gleichzeitige Einwirkung mehrerer Ionen auf den Aufpunkt voraussetzt.

b) Die individuelle Feldkomponente wird nach den Ausführungen am Anfang des 3. Abschnitts nur

dann einen Einfluß ausüben, wenn sich die emittierten Elektronen im Außenraum angenähert frei bewegen können. Hierzu muß die Verschmierung der atomaren Zustände bis zum FERMI-Niveau reichen⁷. Der Grad der Verschmierung hängt von der Iondichte ab. Die Grenzen sind nicht scharf. Wir nehmen völlige Verschmierung an, wenn der mittlere Ionenabstand $d_0 = 0,9(3/4\pi n)^{1/3}$ kleiner ist als der vierfache mittlere Elektronenradius $\bar{r}_k = \int \psi_k^* r \psi_k dr$ im Zustand ψ_k . Gilt dagegen $d_0 > 6\bar{r}_k$, so erwarten wir keine Verschmierung. Den kontinuierlichen Übergang ersetzen wir durch einen unstetigen Sprung an der Stelle $d_0 = 5\bar{r}_k$. Benutzen wir Wasserstoffeigenfunktionen effektiver Kernladungszahl z_{eff} , so folgt

$$n > 1,3 \cdot 10^{18} \left(\frac{\varphi}{z_{\text{eff}}} \right)^3, \quad (n \text{ in cm}^{-3}), \quad (35)$$

für Verschmierung bis zum FERMI-Niveau. In dieser Formel muß die effektive Kernladungszahl der Zustände in der Nähe des FERMI-Niveaus verwendet werden.

c) Erniedrigt das äußere Feld den Potentialwall des Metalles auf die Höhe des FERMI-Niveaus, so treten Verhältnisse ein, über die nichts Näheres bekannt ist. Wir vermeiden unsichere Spekulationen,

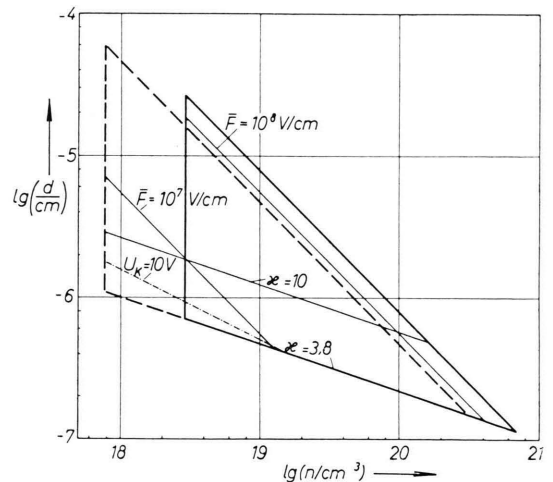


Abb. 3. Das ausgezogene, bzw. gestrichelte Dreieck starker Strichdicke gibt den Anwendungsbereich unserer Berechnungen im $n-d$ -Diagramm für eine Austrittsarbeit von 4,5 bzw. 3,5 eV an. n bezeichnet die Raumladungsdichte, d die Dicke der Raumladungszone. κ und \bar{F} sind im Text definiert. Die Gerade $U_k = 10$ V bezieht sich auf die Anwendung (s. Abschn. 7).

⁷ Die Bedingung für die freie Beweglichkeit im Außenraum läßt sich auch klassisch verstehen. Die in der Höhe des FERMI-Niveaus emittierten Elektronen können sich dann ungehindert entfernen, wenn der Potentialberg zwischen

benachbarten Ionen unter das FERMI-Niveau abgesunken ist. Berechnet man unter Verwendung des mittleren Ionenabstandes die erforderliche Dichte, so ergibt sich $n > 0,9 \cdot 10^{18} (\varphi/z_{\text{eff}})^3$ in Übereinstimmung mit (35).

indem wir die Integration an der Stelle $F = F_e$ abbrechen [s. Gl. (30)]. Auf diese Weise ergibt sich eine untere Grenze des Effektes.

Die Bedingungen a) – c) beschränken unser Interesse auf einen Bereich von n und d , der in Abb. 3 für zwei verschiedene Austrittsarbeiten (3,5 bzw. 4,5 eV) wiedergegeben ist.

6. Allgemeine Ergebnisse

In den Abb. 4 bis 7 ist die Funktion

$$\bar{j}(\bar{F}) = \int_0^{F_n} W(F, \bar{F}, \kappa) j_-(F, \varphi) dF \quad (36)$$

neben $j = j(\bar{F})$ aufgetragen. Als Parameter wurden das Austrittspotential, die Temperatur und der Grenzabstand variiert. κ hat in allen Kurven den Wert 4.

Wie aus Abb. 3 und Gl. (35) ersichtlich ist, setzt unser Effekt erst bei einer bestimmten Feldstärke $F_1(\kappa)$ ein. Bei kleineren Feldstärken kann wegen fehlender Verschmierung nur der von KISLIUK⁵ diskutierte Prozeß zur Erhöhung der Emission beitra-

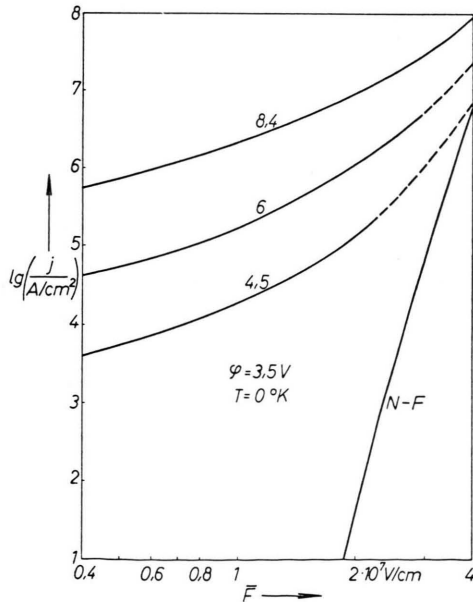


Abb. 4.

Abb. 4–7. Diese Abb. geben die mittlere Emissionsstromdichte ohne (N–F, T–F) bzw. mit Berücksichtigung des Einflusses der individuellen Feldkomponente an. Die letztgenannten Kurven sind durch den Parameter F_n [10^7 Volt/cm] gekennzeichnet. Der größte Parameterwert entspricht in jeder Abb. (ausgenommen Abb. 7) dem Wert der Grenzfeldstärke F_e . Alle F_n entsprechen Grenzabständen $R_n > 5$ Å.

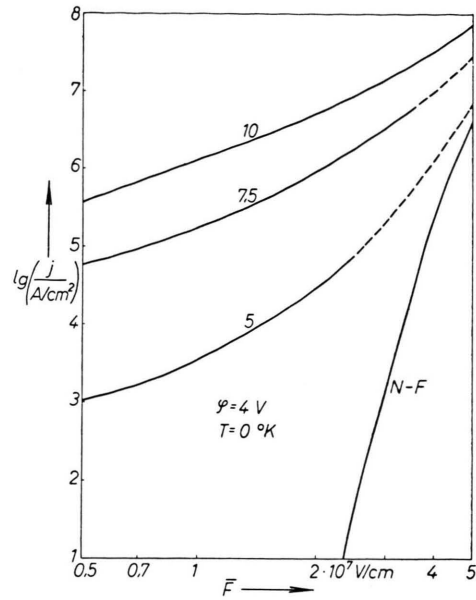


Abb. 5.

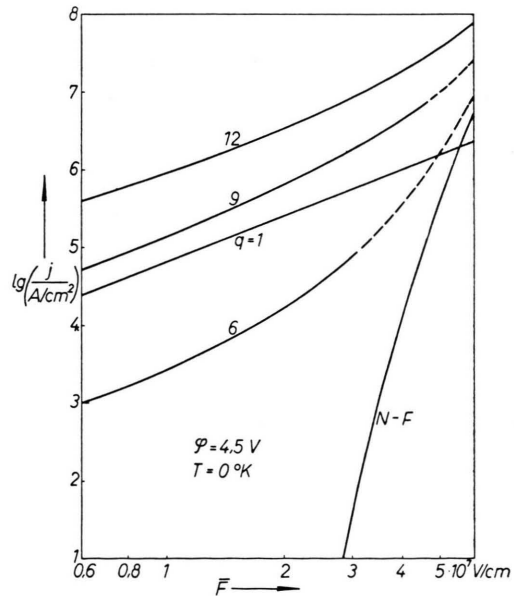


Abb. 6.

gen. In den Abb. 4 – 7 ist F_1 als kleinste Feldstärke gewählt worden.

Wir erkennen, daß unser Effekt den Bereich starker Elektronenemission bis praktisch zur Einsatzfeldstärke verschiebt. An dieser Stelle wird die ursprüngliche Emissionsstromdichte um viele Zehnerpotenzen erhöht. Danach wächst \bar{j} mit F nur langsam an und

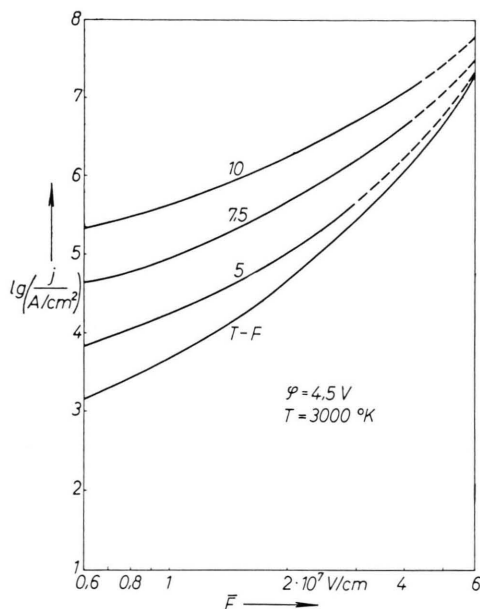


Abb. 7.

nähert sich bei extremen Feldstärken erwartungsgemäß wieder der ursprünglichen Kurve $j(\bar{F})$.

Gegenüber diesem grundsätzlichen Verhalten ist der Einfluß der übrigen Parameter (φ , T , R_n) von untergeordneter Bedeutung. Am stärksten macht sich noch der Grenzabstand bemerkbar, dessen genauer Wert jedoch aus den oben beschriebenen Gründen nicht angegeben werden kann.

7. Anwendung auf die Theorie der Bogenkathode

Der im Vorgang beschriebene Effekt hat besonderes Interesse für die Theorie des Feldbogens.

Für einen solchen Feldbogen ist es charakteristisch, daß weder die thermische Ionenstromkomponente des Plasmas noch die thermische Elektronenemission der Kathode in die Größenordnung der gemessenen extremen Stromdichten von 10^6 A/cm² und mehr kommt. Der Stromtransport muß daher auf andere Weise unterhalten werden.

Zum Aufbau der für die Feldemission erforderlichen Felder sind hohe Ionenstromdichten notwendig, die jedoch immer wesentlich kleiner bleiben müssen als die Elektronenstromdichte (bzw. die Ge-

samtstromdichte). Die Feldelektronen sind nämlich wegen ihrer geringen Ionisierungswahrscheinlichkeit nicht in der Lage, die Ionenstromkomponente bis in die Größenordnung der Gesamtstromdichte zu erhöhen. Daher ist beim Feldbogen stets die Bedingung

$$q = j_-/j_+ \gg 1 \quad (37)$$

erfüllt.

Die Existenzmöglichkeit des Feldbogens in Abhängigkeit von der Gesamtstromdichte läßt sich in folgender Weise überprüfen:

Wir tragen in einem Koordinatensystem als Abszisse die kathodische Feldstärke F auf, als Ordinate die entsprechende Elektronenemission $\bar{j}(F)$. Wählen wir einen festen Wert des Parameters q , so ergibt sich aus der MACKEOWN-Gleichung wegen $j_+ = j_-/q$ eine weitere Beziehung zwischen Feldstärke und Elektronenemissionsdichte, die wir in die gleiche Abb. eintragen. Der Schnittpunkt der Emissionskurven mit der MACKEOWN-Gleichung bestimmt den Wert der Elektronenstromdichte, bei dem der Feldbogen mit dem gewählten q operieren kann. Da die Elektronenemission von verschiedenen Parametern, der Austrittsarbeit des Metalls, der Temperatur, der Oberflächenbeschaffenheit (Gasbeladung, Grobfeinfaktor etc.) beeinflusst wird, muß auch die Lage des Betriebspunktes des Feldbogens von diesen Größen abhängig sein. Als Beispiel haben wir in Abb. 6 den Schnitt der Emissionskurven mit einer MACKEOWN-Kurve für die Parameter $q = 1$, $T = 0$ und $\varphi = 4,5$ durchgeführt. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß der Feldbogen wegen $q \gg 1$ ohne Berücksichtigung der individuellen Feldkomponente nur bei extremen Stromdichten ($\geq 10^7$ A/cm²) existieren könnte.

Bereits in einer früheren Untersuchung⁹ haben wir die erforderliche Mindeststromdichte für die Existenz des Feldbogens untersucht. Damals wurde neben dem Parameter des Austrittspotentials und des Grobfeinfaktors bereits der kombinierte Einfluß der Temperatur und des Feldes ($T-F$ -Emission) erfaßt. Die Emissionskurven wurden dabei in den wesentlichen Grenzbereichen durch die temperatur- bzw. feldkorrigierten Formeln (6 a) und (6 b) l. c. beschrieben. Der theoretisch schwer erfaßbare Zwischenbereich konnte mit ausreichender Genauigkeit inter-

⁸ Unsere Berechnungen erfassen diesen Anschluß an $j(\bar{F})$ nicht, da sich im Bereich $\bar{F} \approx F_n$ die durch die Neutralisation bedingte Begrenzung des COULOMBSCHEN Feldverlaufs

bemerkbar macht. Der entsprechende Kurventeil ist in den Figuren gestrichelt wiedergegeben.

⁹ G. ECKER, Z. Phys. 136, 567 [1954].

poliert werden¹⁰. Ähnliche Untersuchungen wurden später von BAUER¹¹ und LEE¹² angestellt, wobei allerdings BAUER die Emission durch lineare Superposition des Temperatur- und Feldeffektes annähert. Die Berechnungen von LEE zeichnen sich durch größere Genauigkeit aus.

Im Einklang mit der Schlußfolgerung des vorletzten Abschnittes haben wir schon damals festgestellt, daß die Existenz des Feldbogens für $q > 1$ Stromdichten jenseits der experimentell beobachteten Werte erfordert. Allerdings wurde ebendort auch nachgewiesen, daß die Mindeststromdichte entscheidend herabgesetzt werden kann, wenn man sich zu der Annahme eines geeigneten *field-enhancement-factors* bzw. einer Erniedrigung des Austrittspotentials entschließt.

Es lassen sich aber experimentelle Beispiele finden, bei denen die letztgenannten Annahmen nicht vertretbar sind. Die Frage, wie die Existenz des Feldbogens in diesem Falle gedeutet werden kann, ist in der jüngsten Vergangenheit lebhaft diskutiert worden^{12, 13}.

Nach dem Vorgang erwarten wir, daß der Einfluß

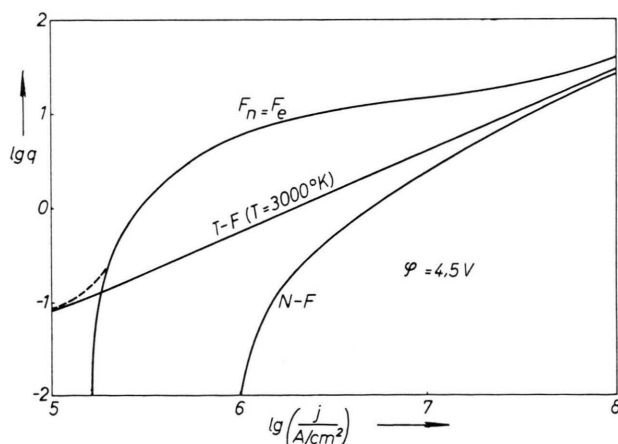


Abb. 8. Die Gesamtstromdichte j und das Verhältnis der Stromkomponenten $q = j_-/j_+$ sind über die MACKEOWN-Gleichung und den Emissionsmechanismus der Elektronen gekoppelt. Dieser Zusammenhang ist für reine Feldemission (N-F), Temperatur-Feldemission (T-F) und unter Berücksichtigung der individuellen Feldkomponente ($F_n = F_e$) wiedergegeben. Die Temperatur der Kathode macht sich bei der letztgenannten Kurve nur in dem unteren Ast (s. gestrichelten Anteil für $T = 3000^\circ\text{K}$) bemerkbar.

der individuellen Feldkomponente geeignet ist, die Mindeststromdichte herabzusetzen. Um diesen Effekt zu beurteilen, wollen wir nach dem oben beschriebenen Verfahren q gegen die Gesamtstromdichte j auftragen.

Dazu machen wir uns zunächst ein Bild von dem interessierenden Parameterbereich. Wir wählen für eine Hg- bzw. W-Kathode $\varphi = 4,5$ V. Auf die Wiedergabe der Ergebnisse für $\varphi = 3,5$ V, 4 V verzichten wir, da, wie sich zeigt, der Einfluß von φ nur geringfügig ist.

Zur Festlegung des Grenzabstandes haben wir zunächst die Dichteverteilung des Elektrons im Grundzustand des Quecksilbers an Hand der HARTREESchen Berechnung¹⁴ bestimmt. Danach tritt praktisch keine Neutralisation für $z > 4 \text{ \AA}$ ein (s. Anfang des 4. Abschnitts). Berechnen wir hieraus die Grenzfeldstärke (Spiegelladung!), so finden wir einen Wert $F_n > F_e$ [s. Gl. (30)]. Der Einfluß der individuellen Feldkomponente muß daher stets größer sein als der für F_e als Grenzfeldstärke berechnete.

Wir werden daher zur Bestimmung des Zusammenhanges $q-j$ die Kurve 12, Abb. 6, verwenden. Dieser ist der konstante Wert $\kappa = 4$ zugrunde gelegt.

In der Anwendung auf die Bogenkathode müßten wir jedoch an sich nicht κ konstant halten, sondern eher konstanten Kathodenfall U_k voraussetzen. Berechnen wir für $U_k = 10$ Volt den Zusammenhang zwischen n und d , wie er sich aus der LANGMUIR-schen Raumladungsformel ergibt, so erhalten wir die Gerade ($U_k = 10$ V) der Abb. 3.

Danach ist für den Bogen die Festsetzung $\kappa = 4$ mit der Bedingung $U_k = 10$ Volt vereinbar. Im übrigen finden wir es besonders auffallend, daß — wie die Abb. erkennen läßt — der Arbeitsbereich unseres Quecksilberfeldbogens gerade in den Bereich maximaler Wirksamkeit des individuellen Effektes fällt.

In Abb. 8 geben wir die $q-j$ -Abhängigkeit doppeltlogarithmisch für drei Fälle wieder: für die reine Feldemission (N-F), für die Temperatur-Feldemission (T-F) und unter Berücksichtigung der individuellen Feldkomponente mit der Festsetzung $F_n = F_e$. Der linke Ast der letzten Kurve ist durch den Einsatzpunkt des individuellen Effektes (s. Abschn. 5 b) beschrieben.

¹⁰ Infolge eines Rechenfehlers bei der numerischen Auswertung sind die Emissionskurven in der früheren Arbeit⁹ um etwa einen Faktor 5 nach kleineren Werten verschoben.

¹¹ A. BAUER, Z. Phys. **138**, 35 [1954].

¹² T. H. LEE, J. Appl. Phys. **28**, 920 [1957]; **29**, 734 [1958].

¹³ A. E. ROBSON u. A. V. ENGEL, Proc. Roy. Soc., Lond. A **242**, 217 [1957]; J. Appl. Phys. **29**, 734 [1958].

¹⁴ D. R. HARTREE u. W. HARTREE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **149**, 210 [1935].

Aus Abb. 8 ist folgendes ersichtlich. Untersuchen wir die Existenz des Feldbogens mit $q = 10$, so wären nach der reinen Feldtheorie wie auch nach der T-F-Theorie Stromdichten von $3 - 4 \cdot 10^7 \text{ A/cm}^2$ erforderlich. Bei Berücksichtigung der individuellen Feldkomponente kann dagegen der Bogen in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund schon mit $2 \cdot 10^6 \text{ A/cm}^2$ existieren. Mit zunehmendem q nimmt der Einfluß der individuellen Feldkomponente scheinbar ab. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß die Festsetzung $F_e = F_n$ nur eine untere Grenze des Effektes liefert. Dies macht sich gerade bei den großen q -Werten bemerkbar.

Wir fassen zusammen:

Ohne Berücksichtigung der individuellen Feldkomponente erstreckt sich der Existenzbereich des Feldbogens nur dann bis zu den gemessenen Stromdichten von einigen 10^6 A/cm^2 herunter, wenn wir extreme Temperatur der Kathode, Erniedrigung des Austrittspotentials oder einen *field-enhancement-factor* annehmen⁹. Berücksichtigen wir dagegen den Einfluß der individuellen Feldkomponente, so wird der Existenzbereich erheblich nach niedrigeren Stromdichten verschoben. In diesem Falle können wir die gemessenen Stromdichten bereits ohne die Zusatzannahme erklären.

Messungen der Driftbeweglichkeit, des elektrischen Widerstandes und der Lebensdauer von Minoritätsladungsträgern an n- und p-Germanium bei hohen hydrostatischen Drucken*

VON GOTTFRIED LANDWEHR **

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt)
(Z. Naturforschg. 14 a, 520—531 [1959]; eingegangen am 28. Februar 1959)

Die Driftbeweglichkeit von Löchern und Elektronen in Germanium wurde bei Drucken bis zu $14\,000 \text{ kp/cm}^2$ mit einem Brücken-Impuls-Verfahren gemessen, das auf der Leitfähigkeitsmodulation durch injizierte Ladungsträger beruht. Die Löcherdriftbeweglichkeit stieg linear mit dem Druck um $(1,39 \pm 0,27)\%$ bei $10\,000 \text{ kp/cm}^2$. Die Elektronendriftbeweglichkeit nahm mit steigendem Druck stärker als proportional ab, um 8% bei $10\,000 \text{ kp/cm}^2$ und um 15% bei $14\,000 \text{ kp/cm}^2$. Die Zunahme der Löcherdriftbeweglichkeit kann bei Berücksichtigung der Druckabhängigkeit der elastischen Konstanten durch ein Anwachsen der effektiven Masse der schweren Löcher um 1% bei $10\,000 \text{ kp/cm}^2$ gedeutet werden. Bei den Elektronen kommt zur Beweglichkeitsänderung auf Grund von Änderungen der effektiven Masse und der elastischen Eigenschaften des Germaniums ein Anteil, der durch eine Umordnung im f-Raum hervorgerufen wird. Die Ursache für die rasche Beweglichkeitsabnahme bei höheren Drucken ist in der Besetzung des [100]-Minimums im f-Raum auf Kosten des [111]-Minimums zu suchen, die Anlaß zu einer Streuung der Elektronen zwischen den beiden Extrema gibt. Die Änderungen der Driftbeweglichkeit stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit mit den aus Widerstandsmessungen an n- und p-Germanium abgeleiteten Änderungen der Leitfähigkeitsbeweglichkeit überein. Daraus kann geschlossen werden, daß sich der Ionisationszustand von Donatoren und Akzeptoren durch Anwendung hoher Drucke nicht ändert und daß keine Haftstellen auftreten. Aus der Differenz der prozentualen Widerstandsänderungen eines $5 \Omega \text{ cm}$ - und eines $11 \Omega \text{ cm}$ -Ge-Kristalles, die gleichzeitig dem Druck ausgesetzt wurden, konnte der Druckkoeffizient der verbotenen Zone zu $4,9 \cdot 10^{-6} \text{ eV cm}^2/\text{kp}$ bestimmt werden, sowie die Eigenleitungskonzentration im Germanium bei $19,5^\circ \text{C}$ zu $2,41 \cdot 10^{26}/\text{cm}^3$. An mehreren Kristallen wurde mit einem Brücken-Doppelimpulsverfahren die Minoritätsladungsträger-Lebensdauer unter Druck gemessen. Mit wachsender Zahl der Druckanwendungen fiel die effektive Lebensdauer auf etwa $1/3$ des Anfangswertes und war schließlich nur noch schwach druckabhängig.

Durch Anwendung hoher Drucke ist man imstande, die Gitterkonstante von Festkörpern zu verändern und damit deren elektrische Eigenschaften. Das Ziel, über eine rein phänomenologische Beschreibung der Druckeffekte hinauszukommen, dürfte beim Germanium, dem wohl am besten untersuchten Festkörper,

am ehesten zu erreichen sein. Die Energiebänderstruktur von n- und p-Germanium ist weitgehend geklärt, für die elektrischen Eigenschaften, insbesondere die Ladungsträgerbeweglichkeit, liegt eine detaillierte Theorie vor. Es besteht somit Aussicht, daß die durch Anwendung hoher hydrostatischer Drucke hervorgerufenen Änderungen der Elektronen- und Löcherbeweglichkeit gedeutet werden können, d. h. zurückgeführt auf Änderungen der effektiven Masse, der elastischen Konstanten und ganz allgemein der

* Teilweise vorgetragen auf der Tagung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften, Heidelberg 1957, s. Phys. Verh. 8, 167 [1957].

** Braunschweig.